

GARCHモデルにおける強定常性, エルゴード性について

宮 田 庸 一

A Study on Stationarity and Ergodicity in GARCH Models

Miyata Yoichi

Summary

This paper surveys typical properties of strict stationarity and ergodicity in the GARCH process. This paper specifically supplements what has not been fully demonstrated yet through the process to define causality and prove the existence of strong stationary solutions.

1 はじめに

Engle (1982) により提案された ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedastic) モデル, および Bollerslev (1986) により拡張された GARCH (Generalized ARCH) モデルは, ファイナンス時系列分析において広く利用されている. GARCH モデルにおいては, 多くの統計ソフト (R, EViews, SAS, TSP など) に実装されているため, ある程度の標本数が得られる状況では容易に推定を行うことができる. 一方で, 推定量の理論的性質を議論する場合, 定常性, エルゴード性などの議論が必要となる. また理論的性質に関しては, その定義, 定理が著者により少し異なる場合がある. このため本稿では, これまで発表された GARCH モデルの強定常性, エルゴード性に関する結果を紹介し, 定理では十分に説明されていない箇所についての補足を行う. 尚, この論文を通じて, $\mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$ は自然数全体の集合, $\mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z} \equiv \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$, $'$ は行列の転置を表し, $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ は定義を意味する記号とする. 初めに GARCH モデルを定義する.

定義1 ボラティリティ過程 $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ を持つ確率過程 $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は GARCH (p, q) $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2, \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

ここで $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ を互いに独立で同一分布に従い、期待値 0、分散 1 の実数値確率変数の列 (今後は $(\eta_t) \sim IID(0, 1)$ と略記する), $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0, \alpha_0 > 0$ とする.

$(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ を持つ確率過程 $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は GARCH (p, q) であることを、今後は $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は GARCH (p, q) 過程、もしくは GARCH (p, q) モデルと省略する. 次に d 変量確率ベクトルの列 $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ に対する強定常性を定義する.

定義2 (強定常性 (strict stationary)) 任意の k, h に対して, $(\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_k)'$ と $(\mathbf{X}'_{1+h}, \dots, \mathbf{X}'_{k+h})'$ は同じ結合確率分布を持つとき, 列 $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常であるという.

GARCH 過程は, 観測される確率変数を含む列 $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ に加えて, 観測されない列 $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ から構成されることに注意しなければならない. このため, GARCH モデルに対する強定常性は通常, 以下のように定義される.

定義3 (強定常解: Straumann 2005 Theorem 3.3.1, Bougerol and Picard 1992, p115) GARCH (p, q) 過程 (1), (2) は強定常解を持つ $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 確率ベクトルの列 $(\epsilon_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ が存在して, (i) (1) かつ (2) を満たす. (ii) 列 $(\epsilon_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常.

定義4 (因果性 (Causality) : Lindner 2009 p44) GARCH (p, q) モデルは因果的 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ σ_t は $(\eta_{t-s})_{s \in \mathbb{N}}$ の関数であり, かつ $(\eta_{t-s})_{s \in \mathbb{N}}$ により生成される σ 加法族に関して可測である.

この定義は Lindner (2009) において記載されている. もしこの定義の意味で因果的であるとき, ϵ_t は $(\eta_{t-s})_{s \in \mathbb{N}_0}$ の関数であり, $(\eta_{t-s})_{s \in \mathbb{N}_0}$ により生成される σ 加法族 $\sigma(\eta_{t-s}, s \in \mathbb{N}_0)$ に対して可測となる. これは Brockwell and Davis (1991) p83の意味で因果的であることを意味している. また Brockwell and Davis の因果性の定義は, Francq and Zakoian (2010) では, 非予測的 (nonanticipative)¹ と呼んでいる. しかし Bougerol and Picard (1992b) では, 例えば GARCH (2, 2) モデルにおいては, $(\sigma_t^2, \epsilon_t^2)'$ が将来のイノベーション $(\eta_{t+h})_{h \in \mathbb{N}}$ から構成されるある関数

¹ nonanticipative に関しては, 適当な和訳を見つけることができなかった. このため, この日本語名称は一般的でない可能性がある.

と独立となるとときに非予測的と呼んでいる. 概念としては非常に似ているが, ここでは Lindner (2009) で与えられている因果性の定義を採用する.

定義 5 (同等: 河田 1985 pp.1-2) 任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して, $P(\omega \in \Omega | \mathbf{X}_t(\omega) = \mathbf{Y}_t(\omega)) = 1$ のとき, 確率ベクトルの列 $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ と $(\mathbf{Y}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は同等であるという.

補題 1 $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ と $(\mathbf{Y}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は同等な d 変量確率過程とする. このとき, $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常 $\iff (\mathbf{Y}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常

証明: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k \times d})$ は $\mathbb{R}^{k \times d}$ におけるボレル集合族とする. この時, 任意の $B_{kd} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k \times d})$ に対して,

$$\begin{aligned} P((\mathbf{Y}'_1, \dots, \mathbf{Y}'_k)' \in B_{kd}) &= P((\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_k)' \in B_{kd}) \\ &= P((\mathbf{X}'_{1+h}, \dots, \mathbf{X}'_{k+h})' \in B_{kd}) \\ &= P((\mathbf{Y}'_{1+h}, \dots, \mathbf{Y}'_{k+h})' \in B_{kd}) \end{aligned}$$

よって定理は示された. \square

補題 2 $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_d})_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常とするとき, 任意の $i = 1, \dots, p$ に対して, $(X_{t_i})_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常.

証明 周辺分布を求める時に使われる単調増大列に対する確率の連続性を用いればよい. \square

2 GARCH (1, 1) モデル

最初に以下の GARCH (1, 1) モデルにおける強定常解について述べる.

$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t, \tag{3}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \epsilon_{t-1}^2, \tag{4}$$

ここで $(\eta_t) \sim IID(0, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha_0 > 0$ とする. ここで (3) を (4) 式に代入することで

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \underbrace{(\beta + \alpha \eta_{t-1}^2)}_{a(\eta_{t-1}) \text{ とおく}} \sigma_{t-1}^2 \tag{5}$$

となる. 最初に GARCH (1, 1) モデルの強定常解に関する定理を与える.

定理 3 (Francq and Zakoian 2010 p24 Theorem 2.1)

$\gamma \equiv E[\log\{\alpha \eta_t^2 + \beta\}]$ とする. $-\infty \leq \gamma < 0 \implies$

(i) 以下で定義される h_t は (5) の解となり, ほとんど至るところ収束する, すなわち

$$h_t = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a(\eta_{t-1}) \cdots a(\eta_{t-i}) \right\} \alpha_0 \in (0, \infty) \quad a.s. \quad (6)$$

(ii) $\tilde{\epsilon}_t = \sqrt{h_t} \eta_t$ により定義される $(\tilde{\epsilon}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は, GARCH (1, 1) モデル (3), (4) における ϵ_t の解となる. また $(\tilde{\epsilon}_t)$ は一意的に定まり, 強定常となる.

(iii) (ii) の $(\tilde{\epsilon}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は因果的であり, かつエルゴード性を持つ.

また $\gamma \geq 0$ かつ $\alpha_0 > 0 \implies$ GARCH (1, 1) モデルに対する強定常解は存在しない.

定理1の証明において, Francq and Zakoian (2010) は (5) の解 $(h_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ の強定常性を用いて, $(\tilde{\epsilon}_t)$ の強定常性を示している. また (5) の解 $(h_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ の一意性を示すことで, 強定常解 $(\tilde{\epsilon}_t, \sqrt{h_t})_{t \in \mathbb{Z}}$, もしくは $(\tilde{\epsilon}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ の一意性を示していることに注意が必要となる.² 実際, 命題 “ $(h_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は (5) の一意的な解 $\implies (\tilde{\epsilon}_t, \sqrt{h_t})_{t \in \mathbb{Z}}$ は, GARCH (1, 1) モデル (3), (4) の一意的な解” は $(\tilde{\epsilon}_t, \sqrt{h_t}) = \sqrt{h_t}(\eta_t, 1)$ と表せるため, 背理法により容易に示すことができる.

注意1 GARCH (1, 1) モデルにおいて, $0 \leq \alpha + \beta < 1$ のとき, Jensen の不等式により $\gamma \equiv E[\log\{\alpha\eta_t^2 + \beta\}] \leq \log(\alpha + \beta)$ より $-\infty \leq \gamma < 0$ となり, 定理3が成り立つことがわかる.

注意2 ARCH (1) モデル (すなわち $\beta = 0$) において, $-\infty \leq E[\log\{\alpha\eta_t^2 + \beta\}] < 0 \iff -\infty \leq \log \alpha + E[\log(\eta_t^2)] < 0 \iff 0 \leq \alpha < \exp(-E[\log(\eta_t^2)])$ となる. これより, もし η_t が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う場合, $0 \leq \alpha < 3.56$ となる.

注意3 GARCH (1, 1) モデルにおける強定常性は, Nelson (1990) により, 仮定 $E[\max(\log \eta_t^2, 0)] < \infty$ の下で初めて研究された. この結果は, Klüppelberg, Lindner, and Maller (2004) により $E[\max(\log \eta_t^2, 0)] = \infty$ の場合まで拡張された.

定理4 ボラティリティ過程 (5) の σ_t^2 に対する解が, (6) で与えられるとする. $\tilde{\epsilon}_t = \sqrt{h_t} \eta_t$ とおくと, $(\tilde{\epsilon}_t, \sqrt{h_t})$ は, GARCH (1, 1) モデル (3), (4) に対する強定常解であり, 因果的, かつエルゴード的である.

この定理より, GARCH (1, 1) モデル (3), (4) に対する強定常解 $(\tilde{\epsilon}_t, \sqrt{h_t})$ の存在を示すためには, ボラティリティ過程 (5) が強定常解 (h_t) を持つことを示せばよいことがわかる.

2 これは, 証明には明確に記載されていないが, C. Francq 教授から上記の説明をしていただいた.

定理 4 の証明 定理10を適用することで示す.

$$f_m(e_0, e_1, e_2, \dots) \equiv \begin{pmatrix} \{1 + \sum_{i=1}^m a(e_1) \cdots a(e_i)\} \alpha_0 \\ e_0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

とおく. このとき $a(\bullet)$ は 2 次関数であり, f_m は, それの乗算, 加算を有限回行うことにより構築できる. よって f_m はボレル可測関数であるため, 定理10の [A2'] は確かめられた. さらに, $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(\eta_t, \eta_{t-1}, \dots) = (h_t, \eta_t)'$ a.s. であり, かつ $h_t \in (0, \infty)$ a.s., $\eta_t \in \mathbb{R}$ a.s. より定理10の [A3] も確かめられる. よって定理10より, $(\eta_t, h_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常, かつエルゴード的となる. さらに定理9から $(\tilde{\epsilon}_t, \sqrt{h_t})_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常, かつエルゴード的となり, 定理が示される. \square

一方で, GARCH (1, 1) 過程が爆発 (Explosion) を引き起こすための条件も知られている.

定理 5 (Francq and Zakoian 2010 p26 Corollary 2.1)

GARCH (1, 1) 過程 (3), (4) において, (ϵ_0, σ_0) は定数ベクトルとして与えられて, $t = 1$ より始まる場合を考える. このとき

- ① $\gamma > 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_t^2 \rightarrow +\infty$ a.s.
- ② $E[\log(\eta_t^2)] < \infty$ とする. このとき, $\gamma > 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_t^2 \rightarrow +\infty$ a.s.

3 GARCH (p, q) モデル

次に GARCH (p, q) モデル (1), (2) を以下のマルコフ表現 (Markov representation) と呼ばれる形で表すことができる.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_t^2 \\ \epsilon_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1}^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \eta_t^2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_t} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_t^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_q \eta_t^2 & \beta_1 \eta_t^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_p \eta_t^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_q & \beta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_t} \underbrace{\begin{pmatrix} \epsilon_{t-1}^2 \\ \epsilon_{t-2}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q}^2 \\ \sigma_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{t-p}^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_{t-1}} \quad (7)$$

これより, $\mathbf{z}_t = \mathbf{b}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{z}_{t-1}$ となる. $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q} \in \mathbb{C}$ を $(p+q) \times (p+q)$ 行列 C の固有値 (重複を許す) とし $\rho(C) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_{p+q}|\}$ を行列 C のスペクトル半径とする. $\|\bullet\|$ を行列の任意のノルムとすると, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|C^t\| = \log \rho(C)$ が成り立つことが知られている. (例えば, 豊田 (2011) 参照)

定義 6 (最大リアプノフ指数 (Top Lyapunov exponent))

$\gamma \equiv \inf_{t \in \mathbb{N}} \frac{1}{t} E(\log \|A_t A_{t-1} \cdots A_1\|)$ を最大リアプノフ指数という. これはノルム $\|\bullet\|$ には依存しない.

最大リアプノフ指数 γ は評価することが困難なことがしばしばある. 次の定理は GARCH (1, 1) モデルのリアプノフ指数を評価するときに役に立つ.

定理 6 (Furstenberg, and Kesten 1960 Theorem 2) 確率行列の列 $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常, かつエルゴード的であるとする. さらに $E[\max(\log \|A_t\|, 0)] < \infty$ とする. このとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|A_t A_{t-1} \cdots A_1\| = \gamma \quad a.s.$$

このとき, 以下の定理が成り立つ.

定理 7 (Francq and Zakoian 2010 p30 Theorem 2.4)

- (i) GARCH (p, q) モデル (1), (2) に対して強定常解が存在 $\iff \gamma < 0$
- (ii) (i) の左辺が成り立つとき, その強定常解は一意的であり, 因果的, かつエルゴード的である.

GARCH (p, q) モデルが強定常性を持つための必要十分条件は, Bougerol and Picard (1992b) により与えられたが, (7) とは異なるマルコフ表現を採用しており, $p \geq 1$ かつ $q \geq 2$ の場合にしか適用することができなかった. 一方で Chen and An (1998), Francq and Zakoian (2010) では, 上記の (7) を採用することで, 全ての $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対する適用が可能となった.

例 1 GARCH (1, 1) モデルを (7) に従ってマルコフ表現をすると,

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \eta_t^2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_t^2 & \beta_1 \eta_t^2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{t-1}^2 \\ \sigma_{t-1}^2 \end{pmatrix}$$

となる. これより

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \log \|A_t A_{t-1} \cdots A_1\| &= \frac{1}{t} \log \left\| \prod_{k=1}^{t-1} (\alpha_1 \eta_{t-k}^2 + \beta_1) A_t \right\| \\ &= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t-1} \log(\alpha_1 \eta_{t-k}^2 + \beta_1) + \frac{1}{t} \log \|A_t\| \end{aligned}$$

大数の法則と Francq and Zakoian (2010) p59, 2.11 より

$$\rightarrow E[\log(\alpha_1 \eta_1^2 + \beta_1)] (\equiv \gamma) \quad (t \rightarrow \infty) \quad a.s.$$

これより, 以下の必要十分条件を得る.

$$E[\log(\alpha_1 \eta_t^2 + \beta_1)] < 0 \iff \text{GARCH}(1, 1) \text{ モデルは強定常解 } (\tilde{\epsilon}_t, \sqrt{h_t})_{t \in \mathbb{Z}} \text{ を持つ.}$$

前述のように, 最大リアプノフ指数 γ を解析的に評価するの難しい. しかし Chen and An (1998) は, 容易に GARCH モデルの強定常性を確認できる以下の必要十分条件を与えた.

定理 8 (Chen and An 1998 Theorem 2.1)

$\sum_{j=1}^p \beta_j + \sum_{i=1}^q \alpha_i < 1 \iff \text{GARCH}(p, q)$ モデル (1), (2) は, 強定常解 $(\tilde{\epsilon}_t, \bar{\sigma}_t)$ を持ち, かつ $E(\tilde{\epsilon}_t^2) < \infty$ となる.

さらに, この強定常解は一意的に定まる.

4 エルゴード性 (Ergodicity)

$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は, 強定常な \mathbb{R}^d 値確率ベクトルの列とする. このとき \mathbf{v} は, ボレル集合族 $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}})$ における $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$ 値確率ベクトルとみなすことができる. ここで, 後退作用素 $\Phi_{BS} : (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}} \rightarrow (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}}$ を $\Phi_{BS}((e_t)_{t \in \mathbb{Z}}) = (e_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}$ により定義する. このとき, 確率ベクトルの列 $(\mathbf{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ に対するエルゴード性を定義する.

定義 7 (エルゴード性 : Straumann 2004, p14, Krengal 1985)

$(\mathbf{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ はエルゴード的 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \Phi_{BS}(\Lambda) = \Lambda$ を満たす任意の $\Lambda \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}})$ に対して, $P((\mathbf{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in \Lambda) \in \{0, 1\}$

このとき, エルゴード性に関して, 以下の良く知られた定理がある.

定理 9 (Straumann 2004, p14, Krengal 1985, Proposition 4.3)

$(E, \mathcal{E}), (\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ は可測空間とする. $(\mathbf{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は E 値確率変数の列とする.

[A1] $(\mathbf{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常, かつエルゴード的であるとする.

[A 2] $f(e_0, e_1, \dots): (E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{E}^{\mathbb{N}_0}) \rightarrow (\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ は可測関数とする.

このとき, $\tilde{\mathbf{v}}_t = f(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t-1}, \dots)$ とおくと, $(\tilde{\mathbf{v}}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常, かつエルゴード的.

定理9において, 簡単のため $E = \tilde{E} = \mathbb{R}$ とし, $\mathcal{E}^{\mathbb{N}_0} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0})$ とおく. このとき, 条件 [A 2] は $f(e_0, e_1, \dots)$ は無限次元空間 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ から \mathbb{R} への写像となり, それが可測写像であるかの判断が難しいことがある. このため, 以下の定理の方が条件の確認が容易である.

定理10 (Straumann 2004 p15 Corollary 2.1.3)

(Ω, \mathcal{A}, P) を確率空間, (E, \mathcal{E}) を可測空間とし, \tilde{E} を完備, かつ可分な距離空間, $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{B}(\tilde{E})$ を \tilde{E} のボレル σ -加法族とする. $(\mathbf{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は E 値確率変数の列とする.

[A 1] $(\mathbf{v}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常, かつエルゴード的であるとする.

[A 2'] 任意の $m \in \mathbb{N}_0$ に対して, $f_m(e_0, e_1, \dots)$ は, $(E, \mathcal{E}) \rightarrow (\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ の可測関数とする.

[A 3] ある $t_0 \in \mathbb{Z}$ 確率ベクトル $f_\infty(\mathbf{v}_{t_0}, \mathbf{v}_{t_0-1}, \dots)$ が存在して, $f_m(\mathbf{v}_{t_0}, \mathbf{v}_{t_0-1}, \dots) \rightarrow f_\infty(\mathbf{v}_{t_0}, \mathbf{v}_{t_0-1}, \dots)$ a.s. かつ $P(f_\infty(\mathbf{v}_{t_0}, \mathbf{v}_{t_0-1}, \dots) \in \tilde{E}) = 1$ とする.

このとき, $\tilde{\mathbf{v}}_t = f_\infty(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t-1}, \dots)$ とおくと, $(\tilde{\mathbf{v}}_t)$ は強定常, かつエルゴード的である.

定理10 [A 3] における f_∞ は, 全ての無限列 $(e_0, e_1, e_2, \dots) \in E$ において極限を持つとは限らない. このため, f_∞ がボレル可測であるかどうかはわからないため, 定理9を直接適用はできない.

Straumann(2004) は, 極限 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(e_0, e_1, e_2, \dots)$ が存在するところでは $f(e_0, e_1, e_2, \dots) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(e_0, e_1, e_2, \dots)$ とおき, その極限が存在しないところでは, \tilde{E} における任意の定数をとるように関数 f を定め, この f がボレル可測関数となることを証明した. その結果, $\tilde{\mathbf{u}}_t = f(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t-1}, \dots)$ とおくと, 定理9から, $(\tilde{\mathbf{u}}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は強定常, かつエルゴード的となる. さらに $(\tilde{\mathbf{u}}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ と $(\tilde{\mathbf{v}}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ は同等であることが示されるため, 補題2より上記の結果が成り立つ.

5 まとめ

本稿において, GARCH (p, q) モデルの強定常性, エルゴード性に関する結果のサーベイを行ってきた. 特に Chen and An (1998) により与えられた定理は容易に GARCH モデルの強定常性を確認できることがわかる. これらの性質は, 最終的には推定量 (特に疑似最尤推定量) の強一貫性, 漸近正規性 (Straumann 2005 Theorem 5.3.1, Theorem 5.6.1) を示す場合に必要となるため, 非常に重要な性質となる.

また GARCH モデルを拡張した AGARCH (Asymmetric GARCH) モデル, EGARCH (Exponential GARCH, Nelson 1991) モデルなど, より説明力の高いモデルが提案されている. 尚, AGARCH モデルの強定常性は, GARCH (p, q) モデルの強定常性の証明と同様の方法

(Straumann 2005 Theorem 3.3.1) で示すことができる.

(みやた よういち・本学経済学部准教授)

謝辞

本研究は科学研究費 (若手研究 (B) 24740069) の支援を一部受けている. また文章表現の不備を指摘していただいた査読者の先生, GARCHモデルの強定常性に関する質問に対して丁寧に対応していただいたC. Francq教授に心より感謝申し上げる.

参考文献

- [1] Bollerslev, T. (1986): Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- [2] Bougerol, P. and Picard, N. (1992a): Stationarity of GARCH processes and of some non-negative time series. *Journal of Econometrics* 52, 115-127.
- [3] Bougerol, P. and Picard, N. (1992b): Strict stationarity of generalized autoregressive process. *The Annals of Probability* 20, 1714-1730.
- [4] Brockwell, P. and Davis, R.A. (1991): *Time series: Theory and Methods, 2nd edition*. New York:Springer
- [5] Chen, M. and An, H.Z. (1998): A note on the stationarity and the existence of moments of the GARCH model, *Statistica Sinica* 8, 505-510.
- [6] Engle, R.F. (1982): Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987-1008.
- [7] Furstenberg, H. and Kesten, H. (1960): Products of random matrices. *Annals of Mathematical Statistics* 31, 457-469.
- [8] Francq, C. and Zakoian, J.M. (2010): *GARCH Models*, Wiley.
- [9] 河田龍夫 (1985): 定常確率過程, 共立出版.
- [10] Klüppelberg, C., Lindner, A. and Maller, R. (2004): A continuous-time GARCH process driven by a Lévy process: stationary and second order behaviour. *Journal of Applied Probability* 41, 601-622.
- [11] Krengal, U. (1985): *Ergodic Theorems*. de Gruyter, Berlin.
- [12] Lindner, A.M. (2009): Stationarity, Mixing, Distributional Properties and Moments of GARCH (p,q)-Processes, *Handbook of Financial Time Series*
- [13] Nelsen, D.B. (1990): Stationarity and persistence in the GARCH (1,1) model. *Econometric Theory* 6, 318-334.
- [14] Nelsen, D.B. (1991): Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica* 59, 347-370.
- [15] Straumann, D. (2005): *Estimation in Conditionally Heterscedastic Time Series Models*. Lecture Notes in Statistics 181, Springer, Berlin.
- [16] 豊田秀樹 (2011): 統計学のための線形代数, 朝倉書店.